



Group Testing against Covid-19

Background

One of the most important concerns in mitigating the COVID-19 pandemic is testing. In some countries, areas or cities, the issue of insufficient capacity for testing has often been raised. For example, in July 2020 when the 3rd wave of Covid-19 outbreak hit Hong Kong, a number of experts suggested that the city needs to increase its testing capacity to 20,000 tests daily, whereas the city could only support 4,000 to 5,000 tests per day in that period. To use the same amount of resources more efficiently, we consider the group testing approach. In such processes, samples are tested by groups. If all the samples in a testing group is negative, then the test returns a negative result. If there are at least one positive sample, then the group proves positive.

Challenge

Here we consider a group testing scheme with several stages: at some stage, if a group tests negative, then all individuals in the group are declared to be negative and released; otherwise the group is subdivided into smaller ones, and we proceed to the next stage. At the last stage, the group size is 1, and all the remaining (i.e. not have been released) individuals are tested separately. It is clear that an individual can be declared positive only through a separate test. The whole process ends if and only if all the individuals are declared, either positive or negative.

The group testing scheme reduces the number of tests needed. For example, consider the case that out of 100 subjects, only one is positive. Dividing the 100 subjects into 5 groups of equal size (20), there must be one group which returns a positive result, while the other 4 proved to be negative. Consider the case where the number of stages is 2, which implies that 20 separate tests are performed for the 20 subjects in the positive group. This process requires only 25 tests in total. By contrast, the conventional approach, i.e., testing all subjects separately, requires 100 tests.

The challenge aims at designing an optimal group testing scheme. A larger group implies a larger chance of returning positive result, which incurs further tests. On the other hand, a smaller group mitigates the possibility of subdividing and retesting, but the small size itself increases the number of tests needed. To make the decision for a scheme, another factor that must be taken into consideration: tests can be erroneous.

Tasks

- 1) Variables that need to be decided are the number of stages and the group size at each stage. The objectives concerned are: the total number of tests, and the false positive rate, and the false negative rate. Try to build mathematical models and make preliminary computation and test.
- 2) To stop early the Covid-19 spread in community, it is highly important to test people who are infected but without symptoms. People who contract Covid-19 may show symptoms after a few or

more days, and some people never show symptoms, but they can still spread the virus. How does your model address the concern about the objective to identify asymptomatic coronavirus carriers?

3) Propose another scheme for the group testing process. It does not necessarily have multiple stages and non-overlapping groups. Describe your setting clearly, and construct a numerical example to explain why the testing efficiency gets improved under this scheme.

4) Based on your modeling work and the current situation of Hong Kong, your team is invited to write a letter to Department of Health of the Government of Hong Kong SAR on your recommendation of group testing strategy for Hong Kong.

Submission

Your solution paper should include a 1-page Summary Sheet and a 1-2 pages Letter. The body cannot exceed 20 pages for a maximum of 23 pages with the Summary Sheet and Letter inclusive. The appendices and references should appear at the end of the paper and do not count towards the 23 pages limit.



群组检测，阻击 2019 新冠病毒

背景

为了缓解 2019 新型冠状病毒 (COVID-19) 全球大流行，其中最重要的关切就是检测。在某些国家、地区或城市，检测能力不足的问题常常被提出。例如，2020 年 7 月，当第三波 Covid-19 疫情袭击香港时，有些专家建议需要将检测能力提高到每天 2 万个测试，然而彼时的香港每天的测试量只能支持 4,000 至 5,000 个检测。为了在相同数量资源的条件下提高使用效率，我们考虑使用群组检测方法。在这样的过程中，样本按群组进行测试。如果某测试群组中的所有样本均为阴性，则检测结果归于阴性。如果群组中至少有一个样本呈阳性，则该群组证明为阳性。

挑战

这里我们考虑一个多阶段群组检测方案：在某个阶段，如果一个小组测试呈阴性，则该小组中的所有个人都被宣布为阴性，并可解除检测；否则，该小组须再细分为更小的群组，然后进入下一阶段检测。在最后的阶段，小组的人数大小为 1，并且所余所有个人（即尚未解除检测者）都将分别进行测试。显然，只有通过单独的测试才能宣布某个人测试结果为阳性。当且仅当所有个人都被宣布为阳性或阴性时，整个检测过程方告结束。

群组检测方案减少了所需的测试量。例如，考虑在 100 个被测者中只有一个是阳性的情况。将 100 名被测者分成 5 组，每组人数相等 (20)，那么一定有一组结果归于阳性，而其他 4 组将证明为阴性。考虑阶段数为 2 的情况，这意味着对阳性小组中的 20 名被测者进行了 20 次单独的测试。此过程总共只需要测试 25 次。相比之下，常规的检测方法，即分别测试所有的被测者，则需要进行 100 次检测。

本次挑战赛的目标是设计最佳的群组检测方案。群组分得较大意味着结果归于阳性的机会更大，这就需要做进一步的检测。另一方面，群组分得较细虽可减小进一步细分群组 and 重新检测的可能性，但是群组较小又会增加所需测试的数量。作出方案决策时还有另一个必须考虑的因素：测试结果有可能是错的。

任务

- 1) 需要确定的变量是阶段数和每个阶段的群组大小。决策有关的目标是：测试总数，假阳性率和假阴性率。请尝试建立数学模型，并进行初步计算和检验。
- 2) 为了尽早阻断 Covid-19 在社区中的传播，非常重要是为无症状受感染者进行检测。感染 Covid-19 的人可能在几天或更长日子之后才出现症状，有些人更是从来都不会显示症状，但他们仍然可以传播病毒。检测出无症状冠状病毒携带者已成为最关切的目标，你的模型如何应对？

- 3) 请提出另一种群组检测方案。它不一定是多个阶段的，也不一定是分组不可重叠。请清晰描述你的方案设置，并构造一个数值示例来说明为何在此方案下测试效率会得到提高。
- 4) 请根据你团队的建模工作和香港当前的疫情状况，向香港卫生署写一封信，提出你团队给香港的群组检测策略建议。

提交

你团队的解决方案论文应包括 1 页的摘要以及一封 1-2 页的建议信。正文不能超过 20 页，含摘要和建议信最多 23 页。附录和参考资料应出现在正文之后，不算在 23 页的限制之内。



群組檢測，狙擊 2019 新冠病毒

背景

為了緩解 2019 新型冠狀病毒 (COVID-19) 全球大流行，其中最重要的關切就是檢測。在某些國家、地區或城市，檢測能力不足的問題常常被提出。例如，2020 年 7 月，當第三波 Covid-19 疫情襲擊香港時，有些專家建議需要將檢測能力提高到每天 2 萬個測試，然而彼時的香港每天的測試量只能支持 4,000 至 5,000 個檢測。為了在相同數量資源的條件下提高使用效率，我們考慮使用群組檢測方法。在這樣的過程中，樣本按群組進行測試。如果某測試群組中的所有樣本均為陰性，則檢測結果歸於陰性。如果群組中至少有一個樣本呈陽性，則該群組證明為陽性。

挑戰

這裡我們考慮一個多階段群組檢測試方案：在某個階段，如果一個小組測試呈陰性，則該小組中的所有個人都被宣布為陰性，並可解除檢測；否則，該小組須再細分為更小的群組，然後進入下一階段檢測。在最後的階段，小組的人數大小為 1，並且所余所有個人（即尚未解除檢測者）都將分別進行測試。顯然，只有通過單獨的測試才能宣布某個人測試結果為陽性。當且僅當所有個人都被宣布為陽性或陰性時，整個檢測過程方告結束。

群組檢測方案減少了所需的測試量。例如，考慮在 100 個被測者中只有一個是陽性的情況。將 100 名被測者分成 5 組，每組人數相等 (20)，那麼一定有一組結果歸於陽性，而其他 4 組將證明為陰性。考慮階段數為 2 的情況，這意味著對陽性小組中的 20 名被測者進行了 20 次單獨的測試。此過程總共只需要測試 25 次。相比之下，常規的檢測方法，即分別測試所有的被測者，則需要進行 100 次檢測。

本次挑戰賽的目標是設計最佳的群組檢測方案。群組分得較大意味著結果歸於陽性的機會更大，這就需要做進一步的檢測。另一方面，群組分得較細雖可減小進一步細分群組和重新檢測的可能性，但是群組較小又會增加所需測試的數量。作出方案決策時還有另一個必須考慮的因素：測試結果有可能是錯的。

任務

- 1) 需要確定的變量是階段數和每個階段的群組大小。決策有關的目標是：測試總數，假陽性率和假陰性率。請嘗試建立數學模型，並進行初步計算和檢驗。
- 2) 為了盡早阻斷 Covid-19 在社區中的傳播，非常重要的一項是為無癥狀受感染者進行檢測。感染 Covid-19 的人可能在幾天或更長日子之後才出現癥狀，有些人更是從來都不會顯示癥狀，但他們仍然可以傳播病毒。檢測出無癥狀冠狀病毒攜帶者已成為最關切的目標，你的模型如何應對？

- 3) 請提出另一種群組檢測方案。它不一定是多個階段的，也不一定是分組不可重疊。請清晰描述你的方案設置，並構造一個數值示例來說明為何在此方案下測試效率會得到提高。
- 4) 請根據你團隊的建模工作和香港當前的疫情狀況，向香港衛生署寫一封信，提出你團隊給香港的群組檢測策略建議。

提交

你團隊的解決方案論文應包括 1 頁的摘要以及一封 1-2 頁的建議信。正文不能超過 20 頁，含摘要和建議信最多 23 頁。附錄和參考資料應出現在正文之後，不算在 23 頁的限制之內。